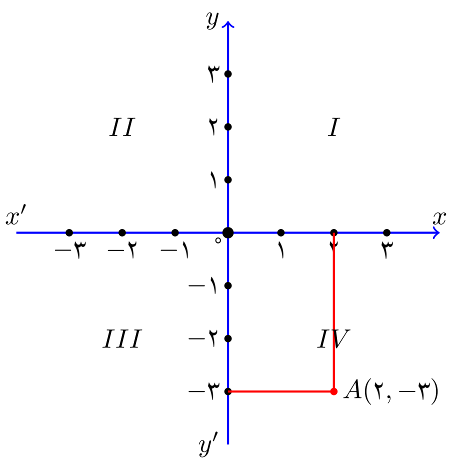
فصل ۴
خط و صفحه

۱.۴ صفحه مختصات دکارتی

دو محور را در نظر بگیرد که در نقطه مبدأشان بر هم منطبقند. لازم نیست بر هم عمود باشند و یا واحد طول روی آنها یکسان باشد ولی بهتر است آنها را عمود بر هم و واحدهای آنها را یکی بگیرید [۱]. این دو محور تشکیل صفحهٔ مختصات دکارتی می دهند. دستگاه مختصات، صفحه را به چهار ناحیه یا ربع تقسیم می کند، ربع اول I، ربع دوم II، ربع سوم III، ربع چهارم IV. هر نقطه در این صفحه دارای دو مختص است که آنها را روی دو محور بترتیب در نظر می‌گیریم



شکل ۱.۴: صفحه مختصات دکارتی و نمایش نقطه A

مثلاً نقطه $A(+۲, -۳)$ که عدد اول را طول نقطه و عدد دوم را عرض نقطه نامیم. در هر زوج مرتب (x, y)، x را

[۱] در محاسبات ریاضی بهتر است واحد طول دو محور یکی باشد ولی ممکن است در محاسبات علمی، چنانچه قصد سنجش دو کمیت مختلف را داریم ایندو یکی نبوده و بنابراین واحدهای دو محور از نظر نوع و مقدار متفاوت ها خواهند بود. مثل اینکه بخواهیم شدت زلزله را بسنجیم که یکی محور انرژی و دیگری بر حسب ریشتر است.

مختص اول و y را مختص دوم گوئیم. برای رسم نقطهٔ A روی صفحه از محور $x-$ها ۲ واحد و از طرف منفی محور عرضها ۳ واحد جدا کرده و A را مشخص می کنیم [۲].

مطلب ۴.۱: فاصلهٔ دو نقطه

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه مفروض در صفحه مختصات دکارتی باشند، فاصله بین A و B را چنین تعریف می کنیم:

$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \tag{۱.۴}$$

و مختصات نقطه P وسط پاره خط AB چنین بدست می آید:

$$\boxed{x_P = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}} \tag{۲.۴}$$

مثال ۱.۱.۴. فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(2, -4)$ و $B(1, 3)$ را یافته و نقطهٔ P وسط AB را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{50} \\ P &: \begin{cases} x_P = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_P = \dfrac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_P = \dfrac{2+1}{2}, \\ y_P = \dfrac{-4+3}{2}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_P = \dfrac{3}{2}, \\ y_P = \dfrac{-1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

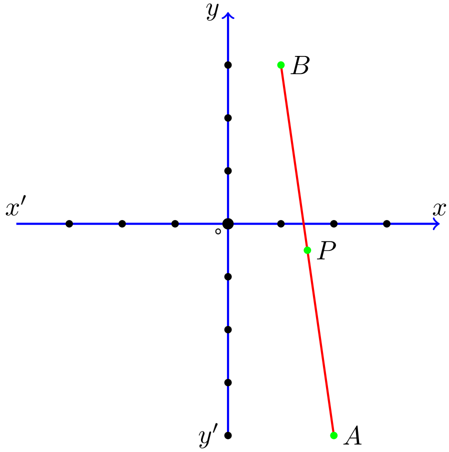
شکل ۲.۴ نمایشی از نقاط A و B و نقطه ی P وسط ایندو را ارائه می دهد. ■

تمرین ۲.۴. .

۱. نقاط زیر را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.
(A) نقطه ای با طول ۲ و عرض ۳-. (B) نقطه ای با طول ۳ و عرض دو برابر طول. (C) نقطه ای با طول ۳ و عرض ۴ واقع در ناحیهٔ دوم. (D) نقطه ای با طول ۲- و عرضی مساوی نصف طول. (E) نقطه ای در ربع سوم با طول ۱- و فاصله از مبداء ۴. (F) نقطه ای با عرض ۲ واقع بر محور عرضها. (G) نقطه ای با عرض ۲ و با فاصلهٔ ۴ از نقطهٔ $(3, -5)$. (H) نقطه ای با طول ۲ و عرضی که قرینهٔ مقدار طول است.

۲. اگر $A(1, 2)$ و $B(-2, 1)$ و $C(-1, -2)$ سه نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، آنها را در صفحه رسم و مثلث بدست آمده را در نظر بگیرید. طول اضلاع مثلث را بدست آورده و نشان دهید مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین است. سپس نقطهٔ P وسط ضلع BC را یافته و طول میانهٔ $\overline{AP}$ را محاسبه نمائید.

[۲] بایستی دقت نمود که نمایش زوج مرتب با بازهٔ باز یکسان است ولی بسته به موضوع مورد بحث، آنها را با هم خلط را نخواهیم کرد.



شکل ۲.۴: نمایش پارخط AB در صفحه مختصات دکارتی و نقطه P وسط آن در مثال ۱.۱.۴

۳.۴ معادله‌خط

در صفحهٔ مختصات هر خط راست متشکل از بینهایت نقطه است. مختصات این نقاط پیوسته در یک معادلهٔ ریاضی صدق می کنند که به آن معادلهٔ خط گوئیم. مثلاً معادلات $y = ۲x + ۱$ و $y = -۴x - ۱۴$ دو خط راست را در صفحه مشخص می کنند. برای رسم خط در صفحهٔ مختصات کافیست دو نقطه از خط را مشخص کنیم و سپس خط را رسم نمائیم. ترسیم خط $y = ۲x + ۱$ مانند شکل ۳.۴ (ب) زیر است.

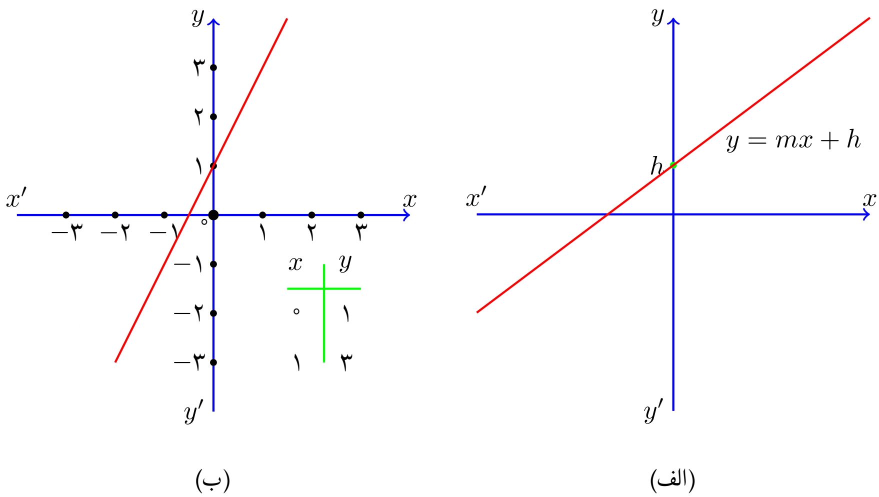
خطوط در صفحه سه دسته اند، خطوط افقی، قائم و مایل. معادلهٔ خطوط افقی به شکل $y = b$ و معادلهٔ خطوط قائم بصورت $x = a$ است. خطی که افقی یا قائم نباشد، مایل بوده و معادلهٔ آن در حالت استاندارد بصورت $y = mx + h$ است که m را شیب خط و h را عرض از مبداء خط گوئیم. برای خط $y = -۴x - ۱۴$ شیب برابر ۴- و عرض از مبداء ۱۴- است، یعنی $m = -۴$ و $h = -۱۴$. اگر شیب مثبت باشد خط صعودی و اگر شیب منفی باشد خط نزولی است. عرض از مبداء خط، نقطه‌ای از محور عرضهاست که خط از آن عبور می کند. اگر $m = ۰$ خط موازی با محور x–ها خواهد بود.

مطلب ۴.۲: وضعیت دو خط در صفحه

دو خط موازی هستند اگر شیب های آنها برابر باشد. دو خط بر هم عمودند[آ] اگر حاصلضرب شیبهایشان برابر ۱ـ باشد. پس اگر $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ دو خط مفروض باشند، آنها موازیند اگر $m = m'$ و عمودند اگر $mm' = -۱$.

[آ] دو خط بر همدیگر عمودند اگر زاویهٔ بینشان ۹۰ درجه باشد.

دو خط $y = ۲x + ۴$ و $y = ۲x - ۵$ با هم موازیند زیرا شیب هر دو ۲ است. معادلهٔ عمومی خط بصورت



شکل ۳.۴: (الف) معادله کلی خط $y = mx + h$ (ب) معادله خط $y = ۲x + ۱$

$Ax + By + C = ۰$ است که A و B هر دو صفر نیستند و برای تبدیل آن به حالت استاندارد با محاسبهٔ شیب بصورت $m = \frac{-A}{B}$ و عرض از مبداء $h = \frac{-C}{B}$ معادلهٔ خط استاندارد را خواهیم نوشت. مثلاً اگر بخواهیم معادلهٔ خط $۸x - ۴y + ۲ = ۰$ را در حالت استاندارد بنویسیم، با محاسبهٔ شیب $۲ = \frac{-۸}{-۴} = m$ و عرض از مبدأ $h = \frac{-۲}{-۴} = \frac{۱}{۲}$ معادلهٔ استاندارد آن $y = ۲x + \frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۱.۳.۴. مقدار a را چنان بیابید که دو خط زیر

$$(a + ۳)x - ۲y + (a + ۴) = ۰ \;\;,\;\; (a + ۱)x + (a + ۳)y + ۲ = ۰$$

الف) با هم موازی باشند. ب) بر هم عمود باشند.

حل. از فرمول $m = \frac{-A}{B}$ شیب خطوط را بدست می آوریم:

$$m = \frac{-A}{B} = \frac{-a - ۳}{-۲} \;\;,\;\; m' = \frac{-A}{B} = \frac{-a - ۱}{a + ۳}$$

(الف) برای موازی بودن دو خط می بایست $m = m'$ باشد یعنی

$$\begin{aligned} \frac{-a-3}{-2} &= \frac{-a-1}{a+3} \\ (-a-3)(a+3) &= (-a-1)(-2) \\ -a^2-6a-9 &= 2a+2 \\ -a^2-8a-11 &= 0 \\ a &= -4 \mp \sqrt{5} \end{aligned}$$

(ب) برای عمود بودن دو خط باید $mm' = -1$ باشد پس

$$mm' = -1 \Rightarrow \frac{-a-3}{-2} \times \frac{-a-1}{a+3} = -1 \Rightarrow \frac{a+1}{-2} = -1 \Rightarrow a = 1$$

■

برای رسم خطوط بهتر است ابتدا معادلهٔ خط را بصورت استاندارد نوشته و بعد آنرا رسم نمائیم. علاوه بر این هر خط را نیز می توان با معین بودن یک نقطه و شیب و یا با مشخص بودن دو نقطه از آن تعیین نمود.

مطلب ۴.۳: معادله خط

معادله خطی با شیب معین m که از نقطه مفروض $A(x_1, y_1)$ می گذرد، از فرمول

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad (3.4)$$

بدست می آید. بعلاوه اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه مفروض در صفحه مختصات دکارتی باشند، معادله خطی که از A و B می گذرد از فرمول

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ , \quad (x_1 \neq x_2)} \qquad (4.4)$$

حاصل می گردد.

مثال ۲.۳.۴. معادلهٔ خطی که از نقاط $A(2, 2)$ و $B(-2, -1)$ می گذرد را بدست آورید.
حل. طبق (۴.۴)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \implies \frac{y-2}{x-2} = \frac{-1-2}{-2-2} \implies \frac{y-2}{x-2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین $y - 2 = \frac{3}{4}(x - 2)$ و با ساده کردن داریم $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$. ■

مثال ۳.۳.۴. محل برخورد دو خط $y = ۲x - ۱$ و $y = -۳x + ۴$ را پیدا کنید.
حل. برای بدست آوردن تقاطع دو خط y-ها را برابر قرار داده، x را بدست آورده و بعد در یکی از معادلات قرار می دهیم:

$$y = y \Rightarrow ۲x - ۱ = -۳x + ۴ \Rightarrow ۵x = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x &= ۱, \\ y &= ۲(۱) - ۱ = ۱. \end{cases} \Rightarrow \quad (۱, ۱)$$

اینکار همان حل دستگاه دو معادله با دو مجهول است. ■

مطلب ۴.۴: فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطهٔ $P_۰(x_۰, y_۰)$ از خط $Ax + By + C = ۰$ برابر است با

$$\boxed{d = \frac{|Ax_۰ + By_۰ + C|}{\sqrt{A^۲ + B^۲}}} \qquad (۵.۴)$$

روشن است که $d = ۰$ بمعنی این است که نقطه روی خط می افتد.

مثال ۴.۳.۴. فاصلهٔ نقطهٔ $P_۰(۲, ۳)$ از خط $۳x + ۴y - ۸ = ۰$ را بدست آورید.
حل. طبق فرمول ۵.۴ داریم:

$$d = \frac{|Ax_۰ + By_۰ + C|}{\sqrt{A^۲ + B^۲}} = \frac{|۳(۲) + ۴(۳) - ۸|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

■

تمرین ۴.۴. .

۱. عدد a را چنان بیابید که دو خط $y = (a - ۲)x + a$ و $y = ax + ۱$ بر هم عمود باشند.

۲. معادلهٔ خطی که شیب آن ۳ بوده و از نقطهٔ $(۵, -۴)$ می گذرد را بدست آورید.

۳. مطلوبست معادلهٔ خطی که از نقاط $A(۱, -۲)$ و $B(۲, -۱)$ می گذرد.

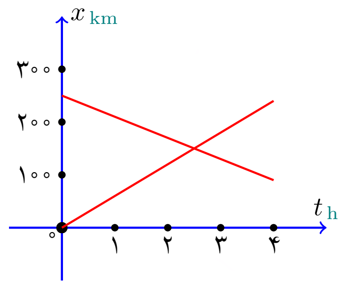
۴. فاصلهٔ نقطهٔ $P_۰(-۱, ۱)$ از خط $x + y + ۲ = ۰$ را بیابید.

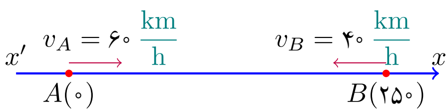
۵. فاصلهٔ نقطهٔ $P_۰(۳, ۱)$ از خط $۲x + ۴y = ۵$ را بدست آورید.

(فیزیک) برای جسمی که با سرعت ثابت v روی مسیر مستقیم الخطی مانند محور x—ها حرکت می کند، معادلهٔ حرکت طی زمان t معادله‌ای است خطی به شکل $x = vt + x_۰$ که $x_۰$ نقطهٔ شروع حرکت است. شیب این خط برابر v است که اگر مثبت باشد متحرک از مبداء مختصات دور می شود و اگر منفی باشد به مبداء مختصات نزدیک می گردد ($x_۰ > ۰$).
به حرکتی که روی مسیر مستقیم الخطی با سرعت ثابت صورت می پذیرد حرکت مستقیم الخط با سرعت ثابت گویند.

مثال ۱.۴.۴. فاصلهٔ دو شهر A و B برابر ۲۵۰ کیلومتر است. دو اتومبیل از این دو شهر بطرف همدیگر بطور همزمان شروع به حرکت می کنند. سرعت اتومبیلی که از A حرکت کرده $۶۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ و سرعت اتومبیلی که از B حرکت کرده $۴۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ است. محل تلاقی دو اتومبیل با یکدیگر کجا و کی اتفاق می افتد.

حل. با توجه به شکل ۴.۴ (ب) معادلهٔ حرکت اتومبیل A بشکل $x = ۶۰t$ و معادلهٔ حرکت اتومبیل B بصورت $x = -۴۰t + ۲۵۰$ است که x مکان بر حسب کیلومتر و t زمان بر حسب ساعت است. زمان تلاقی دو اتومبیل عبارتست از $۶۰t = -۴۰t + ۲۵۰$ یا $t = ۲/۵\,\mathrm{h}$ و مکان تلاقی نقطهٔ $x = ۱۵۰\,\mathrm{km}$ خواهد بود. ■





شکل ۴.۴: (الف) معادله مکان–زمان دو متحرک. (ب) حرکت مستقیم الخط دو متحرک مثال. ۱.۴.۴

(شیمی) می دانیم مبنای سنجش گرمای جسمی بر حسب مقیاس سلسیوس بین صفر (ذوب یخ) و ۱۰۰ (جوش آب) بوده و بر حسب مقیاس فارنهایت بین ۳۲ (ذوب یخ) و ۲۱۲ (جوش آب) است. اگر افزایش دما بصورت خطی انجام گیرد، فرمولی برای ارتباط بین مقیاس سلسیوس و فارنهایت بیابید.

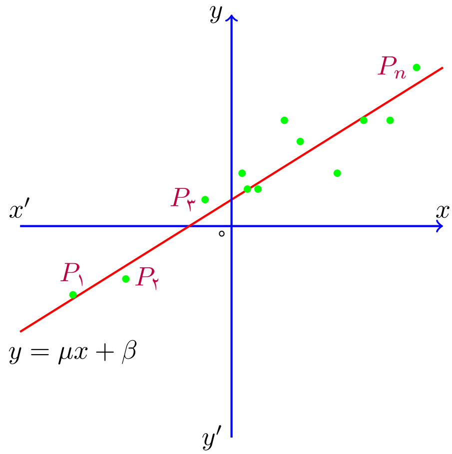
حل. اگر $^\circ\mathrm{C}$ مقدار درجهٔ سلسیوس و F درجهٔ فارنهایت باشد سپس معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A(۰,۳۲)$ (ذوب یخ) و $B(۱۰۰,۲۱۲)$ (جوش آب) می گذرد عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{y-y_۱}{x-x_۱} &= \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \\ \frac{\mathrm{F}-۳۲}{^\circ\mathrm{C}-۰} &= \frac{۲۱۲-۳۲}{۱۰۰-۰} \\ \mathrm{F}-۳۲ &= \frac{۹}{۵}\,^\circ\mathrm{C} \\ \mathrm{F} &= \frac{۹}{۵}\,^\circ\mathrm{C}+۳۲ \end{aligned}$$

■

۵.۴ برازش

گاهی از طریق اندازه گیری در آزمایشات عملی، نقاط حاصله ظاهراً هیچگونه ارتباطی را با هم نشان نمی دهند. اگر حدسیات ما مبتنی بر این باشد که این نقاط می بایست ارتباطی خطی با همدیگر داشته باشند، بدین ترتیب خطی از بین آنها عبور می دهیم که از نظر ریاضی بهترین و برازنده ترین است و به این عمل در اصطلاح برازش نقاط با خط گوئیم. فرض کنید $P_۱(x_۱, y_۱)$، $P_۲(x_۲, y_۲)$، $P_۳(x_۳, y_۳)$ و $\cdots$ و $P_n(x_n, y_n)$ تعداد n نقطه در صفحهٔ مختصات



شکل ۵.۴: خط برازش برای هر تعداد نقطه مفروض در صفحه

باشند. معادلهٔ خط برازش $y = \mu x + \beta$ است که μ و β از دستگاه زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} (\sum x^۲)\mu + (\sum x)\beta = (\sum xy), \\ (\sum x)\mu + n\beta = (\sum y). \end{cases} \qquad (۶.۴)$$

در این دستگاه سیگما $\sum$ نماد جمع است. $\sum x$ بمعنی جمع $x-$ها، $\sum y$ بمعنی جمع $y-$ها، $\sum xy$ بمعنی جمع $xy-$ها و $\sum x^۲$ بمعنی جمع $x^۲-$هاست. این روش برازش را روش کمترین مربعات نامیده و برای محاسبات، بهتر است از جدول زیر استفاده کنیم:

x_i	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$\cdots$	x_n	$\sum x$
y_i	$y_۱$	$y_۲$	$y_۳$	$\cdots$	y_n	$\sum y$
$x_i y_i$	$x_۱ y_۱$	$x_۲ y_۲$	$x_۳ y_۳$	$\cdots$	$x_n y_n$	$\sum xy$
$x_i^۲$	$x_۱^۲$	$x_۲^۲$	$x_۳^۲$	$\cdots$	$x_n^۲$	$\sum x^۲$

مثال ۱.۵.۴. (شیمی) در آزمایشی برای تعیین ضریب شکست، محلولی از ۲- پروپانول تهیه شده و بر حسب درصد حجمی محلول، ضریب شکست حاصل از سنجش با رفلکتومتر بصورت جدول زیر بدست آمده است. با روش کمترین مربعات، داده های حاصل را برازش داده و رابطهٔ خطی آنها را بیابید. اگر نمونهٔ مجهولی از ۲- پروپانول توسط رفلکتومتر ۱/۳۴۰ گزارش شده باشد درصد حجمی نمونه ۲- پروپانول را مشخص نمائید.

درصد حجمی محلول	٪۲	٪۵	٪۸	٪۱۲	٪۱۵
ضریب شکست	۱/۳۳۴۰	۱/۳۳۶۰	۱/۳۳۷۵	۱/۳۴۲۰	۱/۳۴۴۰

حل. برای برازش، نقاط را در جدول زیر نوشته و در ستون آخر مجموع هر سطر را می آوریم:

x_i	٪۲	٪۵	٪۸	٪۱۲	٪۱۵	۰/۴۲
y_i	۱/۳۳۴۰	۱/۳۳۶۰	۱/۳۳۷۵	۱/۳۴۲۰	۱/۳۴۴۰	۶/۶۹۳۵
x_iy_i	۰/۰۲۶۶۸	۰/۰۶۶۸	۰/۱۰۷	۰/۱۶۱۰۴	۰/۲۰۱۶	۰/۵۶۳۱۲
x_i^2	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۶۴	۰/۰۱۴۴	۰/۰۲۲۵	۰/۰۴۶۲

با جایگذاری مقادیر بدست آمده از طرف چپ جدول در دستگاه (۶.۴) می نویسیم:

$$\begin{cases} ۰/۰۴۶۲\mu + ۰/۴۲\beta = ۰/۵۶۳۱۲, \\ ۰/۴۲\mu + ۵\beta = ۶/۶۹۳۵. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = ۰/۰۷۹۳ \\ \beta = ۱/۳۳۲. \end{cases}$$

که خط برازش $y = ۰/۰۷۹۳x + ۱/۳۳۲$ را نتیجه می دهد. برای نمونهٔ مجهولی از محلول ۲-پروپانول که $y = ۱/۳۴۰$ است این مقدار را در معادلهٔ خط برازش قرار داده که مقدار درصد حجمی $x = ٪۱۰/۰۳$ را برآورد می کند. ■

مثال ۲.۵.۴. (نجوم) ابتدای قرن بیستم ستاره شناسان پی بردند که نور کهکشانها با دور شدن از ما تغییر کرده و طبق اثر دوپلر به قرمز گرایش دارد. منجم آمریکائی ادوین هابل، قرمزگرائی[۳] چند کهکشان را اندازه گرفت و نشان داد جهان هستی در حال انبساط است. بنظر او اگر کهکشانی در فاصلهٔ r و با سرعت v از ما دور شود رابطه‌ای خطی بشکل $v = Hr$ دارد. وی با این فرض، مقدار H $\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)$ را که ثابت هابل نام دارد محاسبه نمود. عکس مقدار H عمر کیهان را نشان می‌دهد. فرض کنید سرعت و فاصلهٔ چهار کهکشان را اندازه‌گیری کرده و چنینند:

- (●) دب اکبر فاصلهٔ $۱/۰ \times ۱۰^{۹}$ ly سرعت دور شدن از ما $۱/۵ \times ۱۰^{۷} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- (●) اکلیل شمالی فاصلهٔ $۱/۴ \times ۱۰^{۹}$ ly سرعت دور شدن از ما $۲/۲ \times ۱۰^{۷} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- (●) گاوران (عوّا) فاصلهٔ $۲/۵ \times ۱۰^{۹}$ ly سرعت دور شدن از ما $۳/۹ \times ۱۰^{۷} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- (●) شجاع (هیدرا) فاصلهٔ $۴/۰ \times ۱۰^{۹}$ ly سرعت دور شدن از ما $۶/۱ \times ۱۰^{۷} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

با روش کمترین مربعات، نقاط را برازش داده و رابطهٔ خطی آنها را می یابیم.

$r_i \times ۱۰^{-۹}$	۱/۰	۱/۴	۲/۵	۴/۰	۸/۹
$v_i \times ۱۰^{-۷}$	۱/۵	۲/۲	۳/۹	۶/۱	۱۳/۷
r_iv_i	۱/۵	۳/۰۸	۹/۷۵	۲۴/۴	۳۸/۷۳
r_i^2	۱/۰	۱/۹۶	۶/۲۵	۱۶/۰	۲۵/۲۱

دقت کنید که چون مقادیر فاصلهٔ r_i یکنواختند آنها را برحسب ضریبی از $۱۰^{۹}$ ly نوشته و مقادیر سرعت را نیز برحسب ضریبی از $۱۰^{۷} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ نوشتیم و این کار خلاصه نویسی، بخاطر سادگی محاسبات انجام می گیرد. با جایگذاری مقادیر

[۳] Redshift

بدست آمده از طرف راست جدول در دستگاه (۶.۴) می نویسیم:

$$\begin{cases} ۲۵/۲۱\mu + ۸/۹\beta = ۳۸/۷۳, \\ ۸/۹\mu + ۴\beta = ۱۳/۷. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = ۱/۵۲۵۲ \\ \beta = ۰/۰۳۱۴۴. \end{cases}$$

و معادلهٔ خط برازش

$$v(۱۰^{۷}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) = ۱/۵۲۵۲r(۱۰^{۹}\,\mathrm{ly}) - ۰/۰۳۱۴۴$$

خواهد بود و با ساده کردن آن معادلهٔ خط برازش بصورت

$$v(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) = ۱۵۲/۵۲r(\mathrm{ly}) - ۰/۰۳۱۴۴ \times ۱۰^{-۷}$$

است. بدین ترتیب ثابت هابل $H = ۱/۵۲۵۲ \times ۱۰^{۴}\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{M\,\mathrm{ly}}$ بوده و سن کیهان برابرست با

$$t = \frac{۱}{H} = \frac{۱}{۱/۵۲۵۲ \times ۱۰^{۴}\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{M\,\mathrm{ly}}} = \frac{۹/۵ \times ۱۰^{۱۵}\,\mathrm{m} \times ۱۰^{۶}}{۱/۵۲۵۲ \times ۱۰^{۴}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = ۶/۲۳ \times ۱۰^{۱۷}\mathrm{s} \sim ۱۹Gy$$

این مقدار ۱۹ میلیارد سال برای سن جهان با وجود اجرام دوری مانند کوازار ها کمی غیرعادی است. طی سالهای بعد و اندازه گیری اجرام بیشتری از آسمان، ثابت هابل با دقت بیشتری بدست آمد و ستاره شناسان با استفاده از این مقادیر سن جهان را بین $۱۲Gy$ و $۱۸Gy$ پیش‌بینی می‌کنند.

رشد و زوال جمعیت جهان: افزایش یا کاهش جمعیت یک منطقه یا قبیله و یا جمعیت کل جهان، تابع شرایط محیطی، انسانی و حتی سیاسی آن منطقه است [۴]. چنین دگرگونی در میزان جمعیت را می توان از نظر ریاضی سنجید و رشد و زوال مقدار آنرا در هر زمان ارزیابی نمود. فرض کنید جمعیت یک منطقه در زمان $t_۱$ برابر $P_۱$ و در زمان $t_۲$ برابر مقدار $P_۲$ باشد. آهنگ (میزان) رشد جمعیت در بازهٔ زمانی $[t_۱, t_۲]$ عبارتست از

$$\tau = \frac{P_۲ - P_۱}{P_۱(t_۲ - t_۱)} \tag{۷.۴}$$

که اگر t بر حسب سال باشد، τ آهنگ رشد سالانه جمعیت محسوب می شود. در حالتی که مقدار τ منفی باشد، جمعیت دچار زوال است و گوئیم جمعیت دارای رشد منفی است.

مثال ۳.۵.۴. جمعیت جهان در سال ۲۰۱۵م. برابر ۷۳۴۹ میلیون نفر و در سال ۲۰۱۶م. برابر ۷۴۳۲ میلیون نفر بود. رشد سالانه جمعیت چقدر بوده است.

حل. با جایگذاری مقادیر در فرمول (۷.۴) داریم:

$$\tau = \frac{P_۲ - P_۱}{P_۱(t_۲ - t_۱)} = \frac{۷۴۳۲ \times ۱۰^{۶} - ۷۳۴۹ \times ۱۰^{۶}}{۷۳۴۹ \times ۱۰^{۶}(۲۰۱۶ - ۲۰۱۵)} = \frac{۸۳}{۷۳۴۹} = \%۱/۱۱ \tag{۸.۴}$$

که رشد مثبتی را نشان می دهد. ■

[۴] واژه جمعیت لزوماً جمعیت انسانی نیست.

تمرین ۶.۴. تمرینات تکمیلی.

۱. نقاط $A(-۳,۱)$، $B(۱,۳)$ و $C(۳,-۱)$ را در صفحهٔ مختصات در نظر بگیرید.
الف) مثلث ΔABC را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.
ب) طول اضلاع مثلث ΔABC را حساب کرده و نشان دهید این مثلث متساوی الساقین است.
پ) نقطهٔ M وسط پاره خط $\overline{AC}$ را یافته و طول میانهٔ $\overline{BM}$ را پیدا کنید.
ت) ثابت کنید مثلث ΔABC قائم الزاویه است یعنی $\overline{AC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲$.
ث) مساحت این مثلث را حساب کنید (طبق قواعد هندسه مقدماتی، مساحت مثلث برابرست با حاصلضرب قاعده در نصف ارتفاع).

۲. دو خط $y = x - ۴$ و $y = -۳x + ۸$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقطهٔ برخورد آنها را بدست آورید.

۳. دو خط $۶x - ۳y = ۹$ و $y - ۳x + ۴ = ۰$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقطهٔ برخورد آنها را بیابید. شیب و عرض از مبداء هرکدام را مشخص کنید.

۴. دو خط $y = -۲x - ۱۴$ و $-۳x + ۷y + ۱۳ = ۰$ چه وضعیتی نسبت بهم دارند؟ (موازیند، متعامدند یا متقاطعند).

۵. معادلهٔ خطی را بنویسید که

(الف) از نقاط $A(۱,۵)$ و $B(-۴,۲)$ می‌گذرد.
(ب) از نقاط $A(-۳,۷)$ و $B(-۴,۲)$ می‌گذرد.
(پ) از نقاط $A(۲,۰)$ و $B(۰,۴)$ می‌گذرد.
(ت) از نقاط $A(۱,۴)$ و $B(۱,-۲)$ می‌گذرد.
(ث) از نقطه $A(-۱,-۱)$ و مبداء مختصات بگذرد.
(ج) شیب آن برابر ۲ بوده و از نقطهٔ $(۴,۵)$ بگذرد.
(چ) شیب آن برابر $-\frac{۳}{۲}$ باشد و از نقطهٔ $(-۱,۶)$ عبور کند.
(ح) شیب آن برابر -۱ بوده و از مبداء مختصات بگذرد.
(خ) از نقاط $A(۲,۱)$ گذشته و موازی خط $y = ۴x - ۱$ باشد.
(د) از $A(-۱,۰)$ گذشته و بر خط $۲y - x = ۵$ عمود باشد.
(ذ) از نقطه $A(۲,۱)$ عبور کرده و بر محور عرضها عمود است.
(ر) از $A(۲,۱)$ رد شده و بر محور x-ها عمود است.
(ز) از مبداء گذشته و بر $y = x$ عمود می باشد.
(ژ) از مبداء گذشته و با $y = x$ موازی است.
(س) از محل برخورد خطوط $y = ۲x - ۵$ و $x + y = ۱$ گذشته و با خط $y = x + ۳$ موازی باشد.
(ش) از مکان برخورد $۳x + ۲y = ۱$ و $۲y + ۴x + ۱ = ۰$ عبورکرده و بر خط $۲x - ۵y + ۹ = ۰$ عمود باشد.

۶. معادلهٔ خطی را بنویسید که از مبداء عبور کرده و شیبش ۴۵ درجه باشد.

۷. بازای چه مقداری از a خط $ax + (۲ - a)y = -۲$

(الف) موازی محور $x-$هاست.

(ب) موازی محور $y-$هاست.

(پ) از نقطهٔ $(۲, -۴)$ می‌گذرد؟

۸. مقدار a را چنان بیابید که دو خط زیر

$$y = (۲a - ۱)x + ۴ \ , \ \ y = (a + ۱)x - ۱$$

الف) بر هم عمود باشند. ب) با هم موازی باشند.

۹. مقدار k را چنان بیابید که دو خط زیر

$$(k - ۱)x + ky + ۲ = ۰ \ \ , \ \ (۲ - ۲k)x + ۴y = ۴$$

الف) بر هم عمود باشند. ب) با هم موازی باشند.

۱۰. مقادیر a و b را طوری بیابید که دو خط زیر بر هم منطبق شوند.

$$y = (a - b)x + b - ۱ \ , \ \ y = ۳ax - ۵a - b$$

۱۱. مختصات دو رأس وتری از یک مثلث قائم الزاویه $(۱, ۴)$ و $(-۲, ۱)$ است. مختصات رأس سوم مثلث که بر محور عرضهاست، چیست؟

۱۲. (الف) نشان دهید معادلهٔ خطی که محور $x-$ها را در نقطه ای بطول a و محور $y-$ها را در نقطه ای به عرض b قطع می کند بصورت زیر است.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱ \ , \ \ a, b \neq ۰$$

(ب) معادلهٔ خطی که محور طولها را در $+۲$ و محور عرضها را در -۱ قطع کند چیست؟

(پ) مساحت ایجاد شده بین این خط و محورهای مختصات چیست؟ (در هر دو حالت الف و ب).

۱۳. مقدار m را چنان پیدا کنید که نقاط $A(۱, m)$، $B(۲m + ۱, ۴)$ و $C(m - ۱, ۲)$ بر یک خط راست باشند.

۱۴. مربعی بیابید که مختصات دو رأس واقع بر دو سر یکی از قطرهای آن $C(۴, -۲)$ و $D(۱, ۱)$ باشند. مساحت این مربع چیست؟

۱۵. (شیمی) مبنای گرمای جسمی بر حسب مقیاس کلوین بین ۲۷۳ (ذوب یخ) و ۳۷۳ (جوش آب) است. فرمولی برای ارتباط بین مقیاس سلسیوس و کلوین و نیز فارنهایت و کلوین بیابید. دمای ذوب آهن برابر ۱۵۳۸ درجه سلسیوس است. این دما چند درجهٔ فارنهایت و چند کلوین است؟

۱۶. (فیزیک) بدون در نظر گرفتن نیروی جاذبه گرانش، فرض کنیم که خورشید در اثر حرارت خود منبسط شده و مرتب بر حجمش افزوده شود. اگر در سال ۲۰۰۰م. حجم آن $۱/۴۰۶ \times ۱۰^{۲۷}\,\mathrm{m}^۳$ و در سال ۲۰۱۰م. حجمش به $۱/۴۲۴ \times ۱۰^{۲۷}\,\mathrm{m}^۳$ رسیده باشد و این افزایش حجم رشدی خطی داشته باشد، فرمولی برای این افزایش حجم بر حسب سال بیابید. طبق فرمول بدست آمده در سال ۲۱۰۰م. حجم آن چقدر خواهد بود. این افزایش حجم چند برابر مقدار آن در سال ۲۰۰۰ است؟

۱۷. (فیزیک) دو اتومبیل از شهرهای A و B که ۱۲۰ کیلومتر از هم فاصله دارند بطرف یکدیگر حرکت می کنند. هنگامی که اتومبیل اول از A شروع به حرکت می کند اتومبیل B مقدار ۸ کیلومتر از شهر فاصله گرفته است. سرعت اتومبیلی که از A حرکت کرده $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ۷۰ و سرعت اتومبیلی که از B حرکت کرده $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ۹۰ است. محل تلاقی دو اتومبیل با یکدیگر کجا و چه زمانی پس از حرکت اتفاق می افتد. نمودار حرکت دو اتومبیل را در یک صفحه مختصات رسم کنید.

۱۸. (اقتصاد) قیمت کالائی در ابتدای ماه ۵۰۰ تومان و در روز پنجم ماه به ۵۲۰ تومان رسیده است. اگر این قیمت رشد خطی افزایشی داشته باشد قیمت کالا در انتهای ماه به چقدر خواهد رسید؟

۱۹. هر هفته جمعیت جهان ۱٫۵۷ میلیون نفر اضافه می شود. اگر در سال ۲۰۱۵م. جمعیت جهان ۷۳۴۹ میلیون نفر بوده باشد، درصد افزایش رشد سالانه جمعیت چقدر بوده است. اگر این میزان رشد ثابت بماند مقدار جمعیت جهان در سال ۲۰۲۰م. چقدر خواهد شد.

۲۰. جمعیت ایران در سال ۲۰۱۵م. برابر ۷۹٫۱ میلیون نفر و در سال ۲۰۱۶م. برابر ۸۰ میلیون نفر بوده است. آهنگ رشد سالانه جمعیت ایران چقدر بوده و اگر این میزان رشد ثابت بماند، مقدار جمعیت کشور در سال ۲۰۲۰م. به چند نفر خواهد رسید.

۲۱. (زیست) جهت تعیین حجم پلاسما ی خون بدن انسان یا جانور، مقداری تیوسولفات به جریان خون تزریق می کنند. از آنجا که تیوسولفات یکنواخت و بدون اتلاف در خون باقی نمی ماند و کلیه آنرا بسرعت دفع می کند، بنابراین مقدار آن در خون مرتب کاهش می یابد. اکنون در آزمایشی مقدار ۰٫۵ گرم تیوسولفات را به جانداری تزریق نموده و مقدار آن در خون جانور طبق جدول زیر بدست آمد:

زمان پس از تزریق (دقیقه)	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
غلظت $\frac{m\,\mathrm{gr}}{m\,\mathrm{lit}}$ پلاسمای تیوسولفات	۴۴	۳۸	۳۳	۲۸	۲۵

با روش کمترین مربعات، نقاط را برازش و معادلهٔ خط برازش را بیابید. چه زمانی پس از تزریق غلظت تیوسولفات در خون به $\frac{m\,\mathrm{gr}}{m\,\mathrm{lit}}$ ۳۰ می رسد؟